①

$$W = \frac{1}{2} C_{ijke} E_{ij} E_{ke} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} C_{jike} E_{ji} E_{ke}$$

$$= \frac{1}{2} C_{ijke} E_{ij} E_{ke} \quad (2)$$

$(1)+(2) = 2W = \frac{1}{2}(C_{ijke} + C_{jike}) E_{ij} E_{ke}$

چون عبارت نسبت به i و j تقارن دارد. پس W نسبت به i و j تقارن دارد.

$$\Rightarrow C_{ijke} = C_{jike}$$

$$\Rightarrow C_{ijke} = C_{jeik}$$

$$W = \frac{1}{2} C_{ijke} E_{ij} E_{ke}$$

$$= \frac{1}{2} C_{ijke} E_{ke} E_{ij} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} C_{keij} E_{ke} E_{ij} \quad (2)$$

$(1)+(2) = 2W = \frac{1}{2}(C_{ijke} + C_{keij}) E_{ke} E_{ij}$

چون عبارت نسبت به ij و ke تقارن دارد. پس W این تقارن را دارد.

$$\Rightarrow C_{ijke} = C_{keij}$$

$\Rightarrow$ تعداد مستقل $\longrightarrow$ ۲۱ مؤلفه

11/04/2015 08:25 AM

(٢)

$$\rho \frac{De}{Dt} = T_{ij} D_{ij} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$$

$$\rho_0 e = W \quad \& \quad e = \frac{W}{\rho_0}$$

$$\Rightarrow \rho \frac{De}{Dt} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{DW}{Dt} \qquad \rho/\rho_0 = 1 + E_{ii} \simeq 1 \qquad \frac{DW}{Dt}$$

$$\Rightarrow T_{ij} D_{ij} = \frac{DW}{Dt} \qquad (1.14)$$

$$= \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \frac{D E_{ij}}{Dt}$$

$$= \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} D_{ij}$$

$$\Rightarrow T_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} = \frac{\partial}{\partial E_{ij}} \left(C_{pqrs} E_{pq} E_{rs} \right)$$

$$= \frac{1}{2} C_{pqrs} \left(\delta_{ip} \delta_{jq} E_{rs} + \delta_{ir} \delta_{js} E_{pq} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(C_{ijrs} E_{rs} + C_{pqij} E_{pq} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(C_{ijrs} E_{rs} + C_{ijpq} E_{pq} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(C_{ijrs} E_{rs} + C_{ijrs} E_{rs} \right) = C_{ijrs} E_{rs} \qquad 1.15$$

(۳)

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{1}{2}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{Du_i}{Dt}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{Du_j}{Dt}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

$$= D_{ij}$$

(٤)

F, E, T : بردار اول

F', E', T' : بردار دوم

$F' = QFQ^T$ & $E' = QEQ^T$ & $T' = QTQ^T$

اگر Q یک ماتریس متعامد مثبت مجموعه ماتریس متعامد مثبت تشکیل یک گروه است

$Q' = Q^T \Rightarrow E' = Q'^T E Q'$

$\Rightarrow E'_{pq} = Q'^T_{pk} E_{ke} Q'_{eq} = Q'_{kp} Q'_{eq} E_{ke}$

$T' = Q'^T T Q' \Rightarrow T = Q' T' Q'^T$

$\Rightarrow T_{ij} = Q'_{ir} T'_{rs} Q'^T_{sj} = Q'_{ir} Q'_{js} T'_{rs}$

$T'_{rs} = C_{rspq} E'_{pq}$

$Q'_{ir} Q'_{js} C_{rspq} E'_{pq}$

$= Q'_{kp} Q'_{eq} Q'_{ir} Q'_{js} C_{rspq} E_{ke}$

$= C_{ijke} E_{ke}$

$\Rightarrow C_{ijke} = Q'_{kp} Q'_{eq} Q'_{ir} Q'_{js} C_{rspq}$

$\Rightarrow C_{pqrs} = Q'_{pi} Q'_{qj} Q'_{rk} Q'_{se} C_{ijke}$

$= M_{pi} M_{qj} M_{rk} M_{se} C_{ijke}$

$= \bar{C}_{pqrs} \Rightarrow \bar{C} = C$ — تنسور ایزوتروپیک